Hola

Hablemos de la ecuación de onda

(en cuerdas)

La ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

La ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Física 2 Física 3 Física 4 Física teórica 1 Física teórica 2

Estructura 1 Estructura 2* Estructura 3* Estructura 4

Notación

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\mu}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v_p^2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, \qquad v_p^2 = \frac{T_0}{\mu}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, \qquad c^2 = \frac{T_0}{\mu}$$

Solución de la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v_p^2 \, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Solución de la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v_p^2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

Proponemos $\quad \psi(x,t) = A\,\sin(k\,x+\varphi)\,\cos(\omega\,t+\theta)$

Solución de la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v_p^2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

Proponemos $\psi(x,t) = A\,\sin(k\,x+\varphi)\,\cos(\omega\,t+\theta)$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -A\,\omega^2\,\sin(k\,x+\varphi)\,\cos(\omega\,t+\theta) = -\omega^2\,\psi(x,t)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -A\,k^2\,\sin(k\,x+\varphi)\,\cos(\omega\,t+\theta) = -k^2\,\psi(x,t)$$

Solución de la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v_p^2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

Proponemos $\psi(x,t) = A\,\sin(k\,x+\varphi)\,\cos(\omega\,t+\theta)$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -A\,\omega^2\,\sin(k\,x+\varphi)\,\cos(\omega\,t+\theta) = -\omega^2\,\psi(x,t)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -A\,k^2\,\sin(k\,x+\varphi)\,\cos(\omega\,t+\theta) = -k^2\,\psi(x,t)$$

$$\Longrightarrow\ \omega^2\,\psi(x,t) = v_p^2\,k^2\,\psi(x,t)$$

Solución de la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v_p^2 \, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Proponemos $\psi(x,t) = A\,\sin(k\,x + \varphi)\,\cos(\omega\,t + \theta)$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -A\,\omega^2\,\sin(k\,x + \varphi)\,\cos(\omega\,t + \theta) = -\omega^2\,\psi(x,t)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -A\,k^2\,\sin(k\,x + \varphi)\,\cos(\omega\,t + \theta) = -k^2\,\psi(x,t)$$

$$\Longrightarrow \ \omega^2\;\psi(x,t) = v_p^2\,k^2\;\psi(x,t)$$

$$\Longrightarrow \ \boxed{\omega = v_p\,k \quad \text{con} \quad v_p = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}}$$

Relación de dispersión

Solución de la ecuación de ondas - Separación de variables

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v_p^2 \, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Solución de la ecuación de ondas - Separación de variables

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v_p^2 \, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Proponemos $\psi(x,t) = f(x)\,g(t)$ y reemplazamos:

Solución de la ecuación de ondas - Separación de variables

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v_p^2 \, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Proponemos $\psi(x,t) = f(x)\, g(t)$ y reemplazamos:

$$f(x)\frac{\mathrm{d}^2 g(t)}{\mathrm{d}t^2} = v_p^2 \, \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} \, g(t)$$

Solución de la ecuación de ondas - Separación de variables

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v_p^2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

Proponemos $\psi(x,t) = f(x)\,g(t)$ y reemplazamos:

$$f(x)\frac{\mathrm{d}^2 g(t)}{\mathrm{d}t^2} = v_p^2\,\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}\,g(t)$$

$$\implies \frac{1}{g(t)}\,\frac{\mathrm{d}^2 g(t)}{\mathrm{d}t^2} - \frac{v_p^2}{f(x)}\,\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = 0$$

Solución de la ecuación de ondas - Separación de variables

$$\implies \frac{1}{g(t)}\frac{\mathrm{d}^2 g(t)}{\mathrm{d}t^2} - \frac{v_p^2}{f(x)}\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = 0$$

Solución de la ecuación de ondas - Separación de variables

$$\implies \frac{1}{g(t)}\frac{\mathrm{d}^2 g(t)}{\mathrm{d}t^2} - \frac{v_p^2}{f(x)}\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = 0$$

$$\frac{1}{g(t)}\frac{\mathrm{d}^2 g(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2$$

Solución de la ecuación de ondas - Separación de variables

$$\implies \frac{1}{g(t)}\,\frac{\mathrm{d}^2 g(t)}{\mathrm{d}t^2} - \frac{v_p^2}{f(x)}\,\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = 0$$

$$\frac{1}{g(t)}\,\frac{\mathrm{d}^2 g(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 \implies \boxed{\frac{\mathrm{d}^2 g(t)}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\, g(t) = 0}$$

Solución de la ecuación de ondas - Separación de variables

$$\implies \frac{1}{g(t)}\,\frac{\mathrm{d}^2 g(t)}{\mathrm{d}t^2} - \frac{v_p^2}{f(x)}\,\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = 0$$

$$\frac{1}{g(t)}\,\frac{\mathrm{d}^2 g(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 \implies \boxed{\frac{\mathrm{d}^2 g(t)}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\, g(t) = 0}$$

$$\frac{v_p^2}{f(x)}\,\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = -\omega^2$$

Solución de la ecuación de ondas - Separación de variables

$$\implies \frac{1}{g(t)}\,\frac{\mathrm{d}^2 g(t)}{\mathrm{d}t^2} - \frac{v_p^2}{f(x)}\,\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = 0$$

$$\frac{1}{g(t)}\,\frac{\mathrm{d}^2 g(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 \implies \boxed{\frac{\mathrm{d}^2 g(t)}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\, g(t) = 0}$$

$$\frac{v_p^2}{f(x)}\,\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = -\omega^2 \implies \boxed{\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} + k^2\, f(x) = 0}, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{v_p^2}$$

Solución de la ecuación de ondas - Separación de variables

$$\implies \frac{1}{g(t)}\,\frac{\mathrm{d}^2 g(t)}{\mathrm{d}t^2} - \frac{v_p^2}{f(x)}\,\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = 0$$

$$\frac{1}{g(t)}\,\frac{\mathrm{d}^2 g(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 \implies \boxed{\frac{\mathrm{d}^2 g(t)}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\, g(t) = 0}$$

$$\frac{v_p^2}{f(x)}\,\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = -\omega^2 \implies \boxed{\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} + k^2\, f(x) = 0}, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{v_p^2}$$

$$\implies \psi(x,t) = f(x)\, g(t) = A\, \sin(k\, x + \varphi)\, \cos(\omega\, t + \theta)$$

Condiciones de contorno

Condiciones de contorno

Extremos fijos: $\psi(0,t) = \psi(L,t) = 0$

Condiciones de contorno

Extremos fijos: $\psi(0,t) = \psi(L,t) = 0$

Extremos libres: $$\frac{\partial \psi(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi(L,t)}{\partial x} = 0$$

Condiciones de contorno

Extremos fijos: $\psi(0,t) = \psi(L,t) = 0$

Extremos libres: $\dfrac{\partial\psi(0,t)}{\partial x} = \dfrac{\partial\psi(L,t)}{\partial x} = 0$

Extremos mixtos: $\dfrac{\partial\psi(0,t)}{\partial x} = \psi(L,t) = 0$ ó $\psi(0,t) = \dfrac{\partial\psi(L,t)}{\partial x} = 0$

Extremos fijos

Proponemos $\psi(x,t) = A\,\sin(k\,x+\varphi)\,\cos(\omega\,t+\theta)$

y pedimos que valga $\psi(0,t) = \psi(L,t) = 0$

Extremos fijos

Proponemos $\quad \psi(x,t) = A\,\sin(k\,x + \varphi)\,\cos(\omega\,t + \theta)$

y pedimos que valga $\quad \psi(0,t) = \psi(L,t) = 0$

Sigo allá $\longrightarrow$

Extremos fijos

Proponemos $\psi(x,t) = A\,\sin(k\,x+\varphi)\,\cos(\omega\,t+\theta)$

y pedimos que valga $\psi(0,t) = \psi(L,t) = 0$

$$\Longrightarrow\ \psi(x,t) = A\,\sin\left(\tfrac{n\,\pi}{L}\,x\right)\,\cos(\omega\,t+\theta), \qquad n = 1, 2, \cdots$$

Extremos fijos

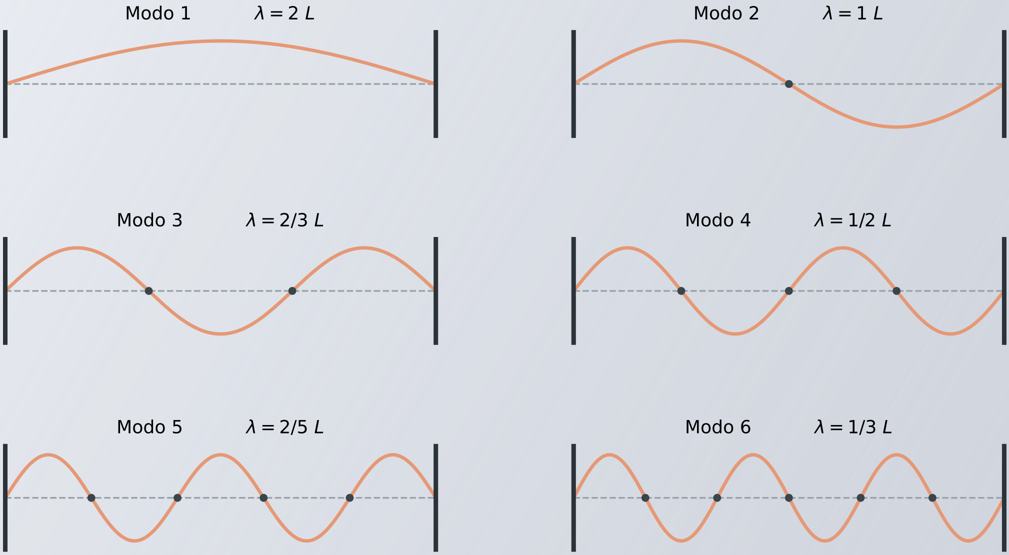
Proponemos $\psi(x,t) = A\,\sin(k\,x+\varphi)\,\cos(\omega\,t+\theta)$

y pedimos que valga $\psi(0,t) = \psi(L,t) = 0$

$$\Longrightarrow \psi(x,t) = A\,\sin\!\left(\tfrac{n\,\pi}{L}\,x\right)\,\cos(\omega\,t+\theta), \qquad n = 1,2,\cdots$$

¿Pero cuántos modos tenemos? ¿Y cómo los dibujamos?

Extremos fijos



Extremos libres

Proponemos $\quad \psi(x,t) = A\,\sin(k\,x+\varphi)\,\cos(\omega\,t+\theta)$

y pedimos que valga $\quad \dfrac{\partial\psi}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial\psi}{\partial x}(L,t) = 0$

Extremos libres

Proponemos $\quad \psi(x,t) = A\,\sin(k\,x + \varphi)\,\cos(\omega\,t + \theta)$

y pedimos que valga $\quad \dfrac{\partial \psi}{\partial x}\,(0,t) = \dfrac{\partial \psi}{\partial x}\,(L,t) = 0$

Sigo allá $\longrightarrow$

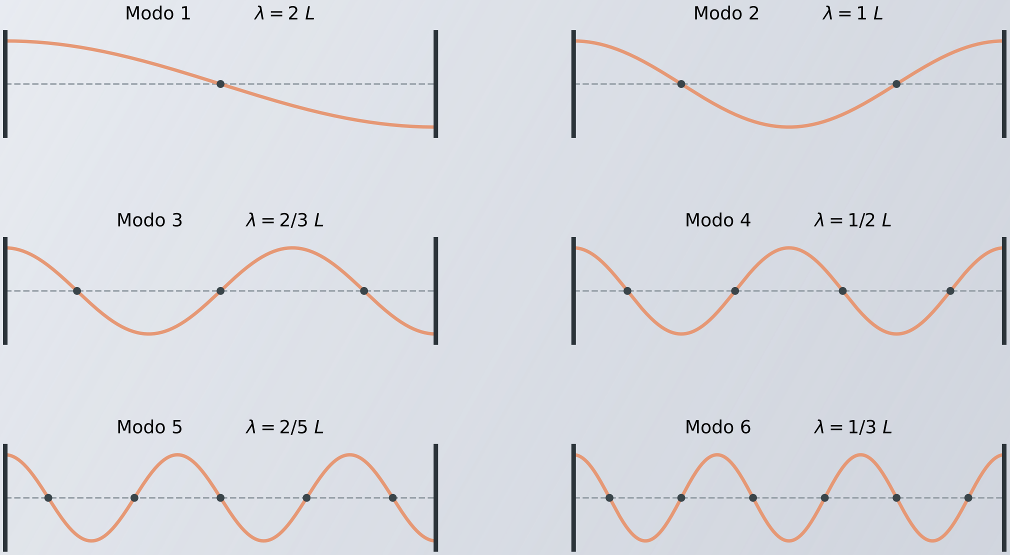
Extremos libres

Proponemos $\psi(x,t) = A\,\sin(k\,x+\varphi)\,\cos(\omega\,t+\theta)$

y pedimos que valga $\dfrac{\partial\psi}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial\psi}{\partial x}(L,t) = 0$

$$\Longrightarrow\quad \psi(x,t) = A\,\cos\!\left(\tfrac{n\,\pi}{L}\,x\right)\,\cos(\omega\,t+\theta), \qquad n = 1,2,\cdots$$

Extremos libres



Extremos fijos vs extremos libres

Extremos fijos $\rightarrow$ $\psi(x,t) = A\,\sin\!\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)\,\cos(\omega\,t+\theta), \quad n = 1, 2, \cdots$

Extremos libres $\rightarrow$ $\psi(x,t) = A\,\cos\!\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)\,\cos(\omega\,t+\theta), \quad n = 1, 2, \cdots$

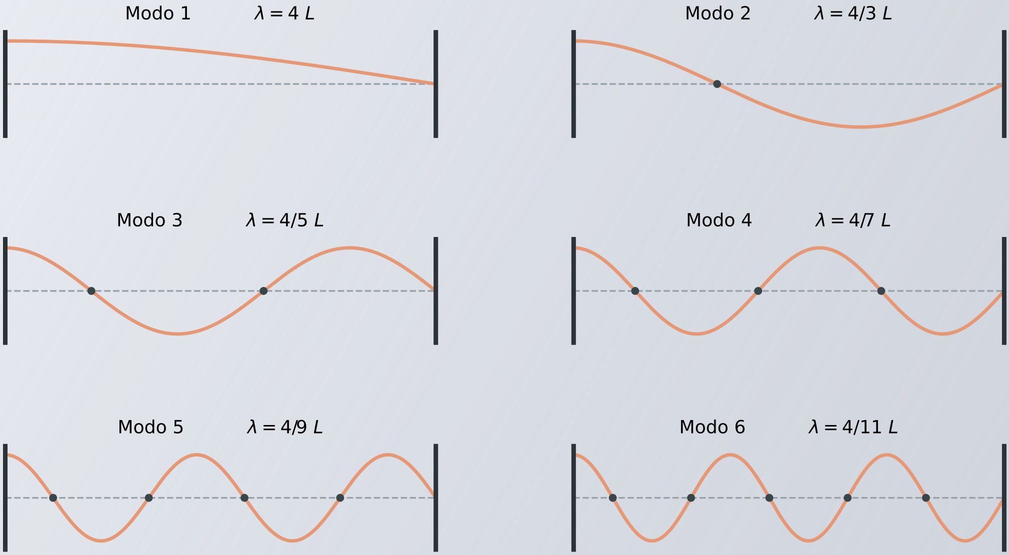
Extremos mixtos

Proponemos $\quad \psi(x,t) = A\,\sin(k\,x+\varphi)\,\cos(\omega\,t+\theta)$

y pedimos que valga $\quad \psi(0,t) = \dfrac{\partial\psi}{\partial x}(L,t) = 0$

$$\Longrightarrow \quad \psi(x,t) = A\,\sin\!\left(\tfrac{(2n-1)\,\pi}{2L}\,x\right)\,\cos(\omega\,t+\theta), \qquad n = 1, 2, \cdots$$

Extremos mixtos



Guía de rosolución del último punto del ejercicio 1

Guía de rosolución del último punto del ejercicio 1

- Plantear la solución de siempre pero con contornos $\psi\left(-\frac{L}{2},t\right) = \psi\left(\frac{L}{2},t\right) = 0$.

Guía de rosolución del último punto del ejercicio 1

- Plantear la solución de siempre pero con contornos $\psi\left(-\frac{L}{2},t\right)=\psi\left(\frac{L}{2},t\right)=0$.
- De ahí salen dos ecuaciones: $-k\frac{L}{2}+\varphi=p\,\pi$ y $k\frac{L}{2}+\varphi=q\,\pi$.

Guía de rosolución del último punto del ejercicio 1

- Plantear la solución de siempre pero con contornos $\psi\left(-\frac{L}{2},t\right)=\psi\left(\frac{L}{2},t\right)=0$.
- De ahí salen dos ecuaciones: $-k\frac{L}{2}+\varphi=p\,\pi$ y $k\frac{L}{2}+\varphi=q\,\pi$.
- Sumando y restando las ecuaciones: $\varphi=\frac{p+q}{2}\,\pi$ y $k=(q-p)\,\frac{\pi}{L}$.

Guía de rosolución del último punto del ejercicio 1

- Plantear la solución de siempre pero con contornos $\psi\left(-\frac{L}{2}, t\right) = \psi\left(\frac{L}{2}, t\right) = 0$.
- De ahí salen dos ecuaciones: $-k\frac{L}{2} + \varphi = p\,\pi$ y $k\frac{L}{2} + \varphi = q\,\pi$.
- Sumando y restando las ecuaciones: $\varphi = \frac{p+q}{2}\,\pi$ y $k = (q-p)\,\frac{\pi}{L}$.
- Podemos reescribir $\varphi = \frac{q-p}{2}\,\pi + p\,\pi$ y absorber el último término dentro del $\sin$.

Guía de rosolución del último punto del ejercicio 1

- Plantear la solución de siempre pero con contornos $\psi\left(-\frac{L}{2}, t\right) = \psi\left(\frac{L}{2}, t\right) = 0$.
- De ahí salen dos ecuaciones: $-k\frac{L}{2} + \varphi = p\,\pi$ y $k\frac{L}{2} + \varphi = q\,\pi$.
- Sumando y restando las ecuaciones: $\varphi = \frac{p+q}{2}\,\pi$ y $k = (q-p)\,\frac{\pi}{L}$.
- Podemos reescribir $\varphi = \frac{q-p}{2}\,\pi + p\,\pi$ y absorber el último término dentro del $\sin$.
- Definiendo $n = q - p$, obtenemos finalmente

$$\psi(x,t) = A\,\sin\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x + \frac{n\,\pi}{2}\right)\,\cos(\omega\,t + \theta)$$

Guía de rosolución del último punto del ejercicio 1

- Plantear la solución de siempre pero con contornos $\psi\left(-\frac{L}{2},t\right)=\psi\left(\frac{L}{2},t\right)=0$.
- De ahí salen dos ecuaciones: $-k\frac{L}{2}+\varphi=p\,\pi$ y $k\frac{L}{2}+\varphi=q\,\pi$.
- Sumando y restando las ecuaciones: $\varphi=\frac{p+q}{2}\pi$ y $k=(q-p)\,\frac{\pi}{L}$.
- Podemos reescribir $\varphi=\frac{q-p}{2}\pi+p\,\pi$ y absorber el último término dentro del $\sin$.
- Definiendo $n=q-p$, obtenemos finalmente

$$\psi(x,t)=A\,\sin\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x+\frac{n\,\pi}{2}\right)\,\cos(\omega\,t+\theta)$$

Importante: vuelvan a hacer todo el ejericio 1 en sus casas.

Eso es todo.