Hola

Para un gas de Boltzmann (partículas distinguibles)

¿Cuál es la probabilidad de tener todas las partículas en el fundamental?

Para un gas de Boltzmann (partículas distinguibles)

¿Cuál es la probabilidad de tener todas las partículas en el fundamental?

$$P(E=0) = \frac{e^{-\beta 0}}{Z_1} = \frac{1}{Z_1}$$

Para un gas de Boltzmann (partículas distinguibles)

¿Cuál es la probabilidad de tener todas las partículas en el fundamental?

$$P(E=0) = \frac{e^{-\beta 0}}{Z_1} = \frac{1}{Z_1} = \frac{\lambda^3}{V}$$

Para un gas de Boltzmann (partículas distinguibles)

¿Cuál es la probabilidad de tener todas las partículas en el fundamental?

$$P(E=0)=\frac{e^{-\beta 0}}{Z_1}=\frac{1}{Z_1}=\frac{\lambda^3}{V}\xrightarrow[T>0]{N\to\infty}0$$

¿Y para un gas de Bosones?

Tengo 3 partículas y niveles de energía ϵ_0 , ϵ_1

Tengo 3 partículas y niveles de energía ϵ_0 , ϵ_1

¿Cuál es la probabilidad de tener todas las partículas en el fundamental?

Tengo 3 partículas y niveles de energía ϵ_0 , ϵ_1

¿Cuál es la probabilidad de tener todas las partículas en el fundamental?

Partículas distinguibles

Tengo 3 partículas y niveles de energía ϵ_0 , ϵ_1

¿Cuál es la probabilidad de tener todas las partículas en el fundamental?

Partículas distinguibles

$\boxed{\epsilon_0\ \epsilon_0\ \epsilon_0}$	$\boxed{\epsilon_0\ \epsilon_0\ \epsilon_1}$
$\boxed{\epsilon_0\ \epsilon_1\ \epsilon_0}$	$\boxed{\epsilon_0\ \epsilon_1\ \epsilon_1}$
$\boxed{\epsilon_1\ \epsilon_0\ \epsilon_0}$	$\boxed{\epsilon_1\ \epsilon_0\ \epsilon_1}$
$\boxed{\epsilon_1\ \epsilon_1\ \epsilon_0}$	$\boxed{\epsilon_1\ \epsilon_1\ \epsilon_1}$

Tengo 3 partículas y niveles de energía ϵ_0 , ϵ_1

¿Cuál es la probabilidad de tener todas las partículas en el fundamental?

Partículas distinguibles

$\epsilon_0\ \epsilon_0\ \epsilon_0$	$\epsilon_0\ \epsilon_0\ \epsilon_1$
$\epsilon_0\ \epsilon_1\ \epsilon_0$	$\epsilon_0\ \epsilon_1\ \epsilon_1$
$\epsilon_1\ \epsilon_0\ \epsilon_0$	$\epsilon_1\ \epsilon_0\ \epsilon_1$
$\epsilon_1\ \epsilon_1\ \epsilon_0$	$\epsilon_1\ \epsilon_1\ \epsilon_1$

Tengo 3 partículas y niveles de energía ϵ_0 , ϵ_1

¿Cuál es la probabilidad de tener todas las partículas en el fundamental?

Partículas distinguibles

$\boxed{\epsilon_0\ \epsilon_0\ \epsilon_0}$	$\epsilon_0\ \epsilon_0\ \epsilon_1$
$\epsilon_0\ \epsilon_1\ \epsilon_0$	$\epsilon_0\ \epsilon_1\ \epsilon_1$
$\epsilon_1\ \epsilon_0\ \epsilon_0$	$\epsilon_1\ \epsilon_0\ \epsilon_1$
$\epsilon_1\ \epsilon_1\ \epsilon_0$	$\epsilon_1\ \epsilon_1\ \epsilon_1$

$$P_D(E = 3\epsilon_0) = 1/8$$

Tengo 3 partículas y niveles de energía ϵ_0 , ϵ_1

¿Cuál es la probabilidad de tener todas las partículas en el fundamental?

Partículas distinguibles

$\boxed{\epsilon_0\ \epsilon_0\ \epsilon_0}$	$\epsilon_0\ \epsilon_0\ \epsilon_1$
$\epsilon_0\ \epsilon_1\ \epsilon_0$	$\epsilon_0\ \epsilon_1\ \epsilon_1$
$\epsilon_1\ \epsilon_0\ \epsilon_0$	$\epsilon_1\ \epsilon_0\ \epsilon_1$
$\epsilon_1\ \epsilon_1\ \epsilon_0$	$\epsilon_1\ \epsilon_1\ \epsilon_1$

$$P_D(E = 3\epsilon_0) = 1/8$$

Partículas indistinguibles

Tengo 3 partículas y niveles de energía ϵ_0 , ϵ_1

¿Cuál es la probabilidad de tener todas las partículas en el fundamental?

Partículas distinguibles		*Partículas indistinguibles*
$\boxed{\epsilon_0\ \epsilon_0\ \epsilon_0}$	$\boxed{\epsilon_0\ \epsilon_0\ \epsilon_1}$	$\boxed{3\epsilon_0\ 0\epsilon_1}$
$\boxed{\epsilon_0\ \epsilon_1\ \epsilon_0}$	$\boxed{\epsilon_0\ \epsilon_1\ \epsilon_1}$	$\boxed{2\epsilon_0\ 1\epsilon_1}$
$\boxed{\epsilon_1\ \epsilon_0\ \epsilon_0}$	$\boxed{\epsilon_1\ \epsilon_0\ \epsilon_1}$	$\boxed{1\epsilon_0\ 2\epsilon_1}$
$\boxed{\epsilon_1\ \epsilon_1\ \epsilon_0}$	$\boxed{\epsilon_1\ \epsilon_1\ \epsilon_1}$	$\boxed{0\epsilon_0\ 3\epsilon_1}$

$$P_D(E = 3\epsilon_0) = 1/8$$

Tengo 3 partículas y niveles de energía ϵ_0 , ϵ_1

¿Cuál es la probabilidad de tener todas las partículas en el fundamental?

Partículas distinguibles		*Partículas indistinguibles*
$\boxed{\epsilon_0\ \epsilon_0\ \epsilon_0}$	$\epsilon_0\ \epsilon_0\ \epsilon_1$	$\boxed{3\epsilon_0\ 0\epsilon_1}$
$\epsilon_0\ \epsilon_1\ \epsilon_0$	$\epsilon_0\ \epsilon_1\ \epsilon_1$	$2\epsilon_0\ 1\epsilon_1$
$\epsilon_1\ \epsilon_0\ \epsilon_0$	$\epsilon_1\ \epsilon_0\ \epsilon_1$	$1\epsilon_0\ 2\epsilon_1$
$\epsilon_1\ \epsilon_1\ \epsilon_0$	$\epsilon_1\ \epsilon_1\ \epsilon_1$	$0\epsilon_0\ 3\epsilon_1$

$$P_D(E = 3\epsilon_0) = 1/8$$

Tengo 3 partículas y niveles de energía ϵ_0 , ϵ_1

¿Cuál es la probabilidad de tener todas las partículas en el fundamental?

Partículas distinguibles

$\boxed{\epsilon_0\ \epsilon_0\ \epsilon_0}$ $\boxed{\epsilon_0\ \epsilon_0\ \epsilon_1}$

$\boxed{\epsilon_0\ \epsilon_1\ \epsilon_0}$ $\boxed{\epsilon_0\ \epsilon_1\ \epsilon_1}$

$\boxed{\epsilon_1\ \epsilon_0\ \epsilon_0}$ $\boxed{\epsilon_1\ \epsilon_0\ \epsilon_1}$

$\boxed{\epsilon_1\ \epsilon_1\ \epsilon_0}$ $\boxed{\epsilon_1\ \epsilon_1\ \epsilon_1}$

$$P_D(E = 3\epsilon_0) = 1/8$$

Partículas indistinguibles

$\boxed{3\epsilon_0\ 0\epsilon_1}$

$\boxed{2\epsilon_0\ 1\epsilon_1}$

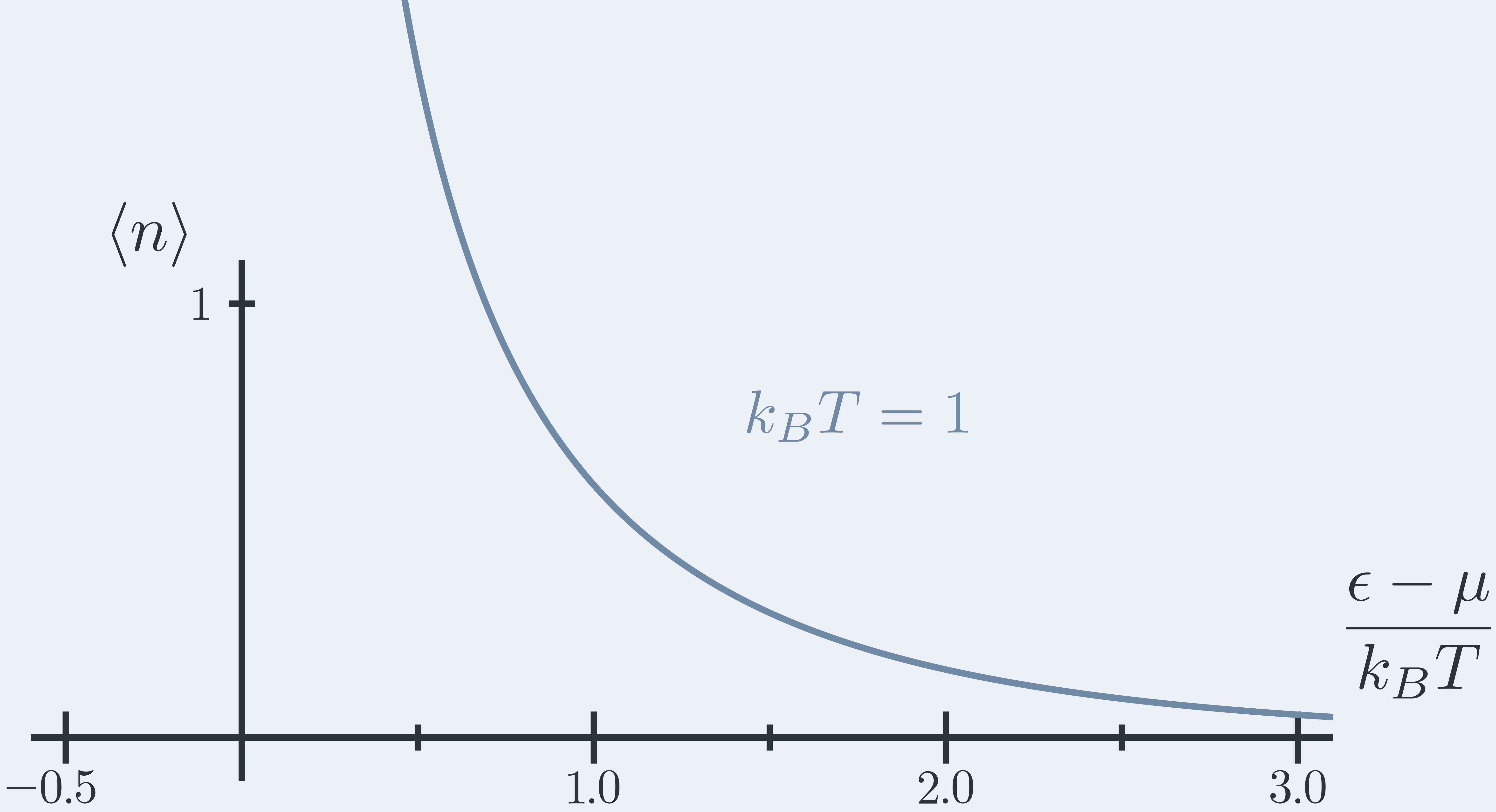
$\boxed{1\epsilon_0\ 2\epsilon_1}$

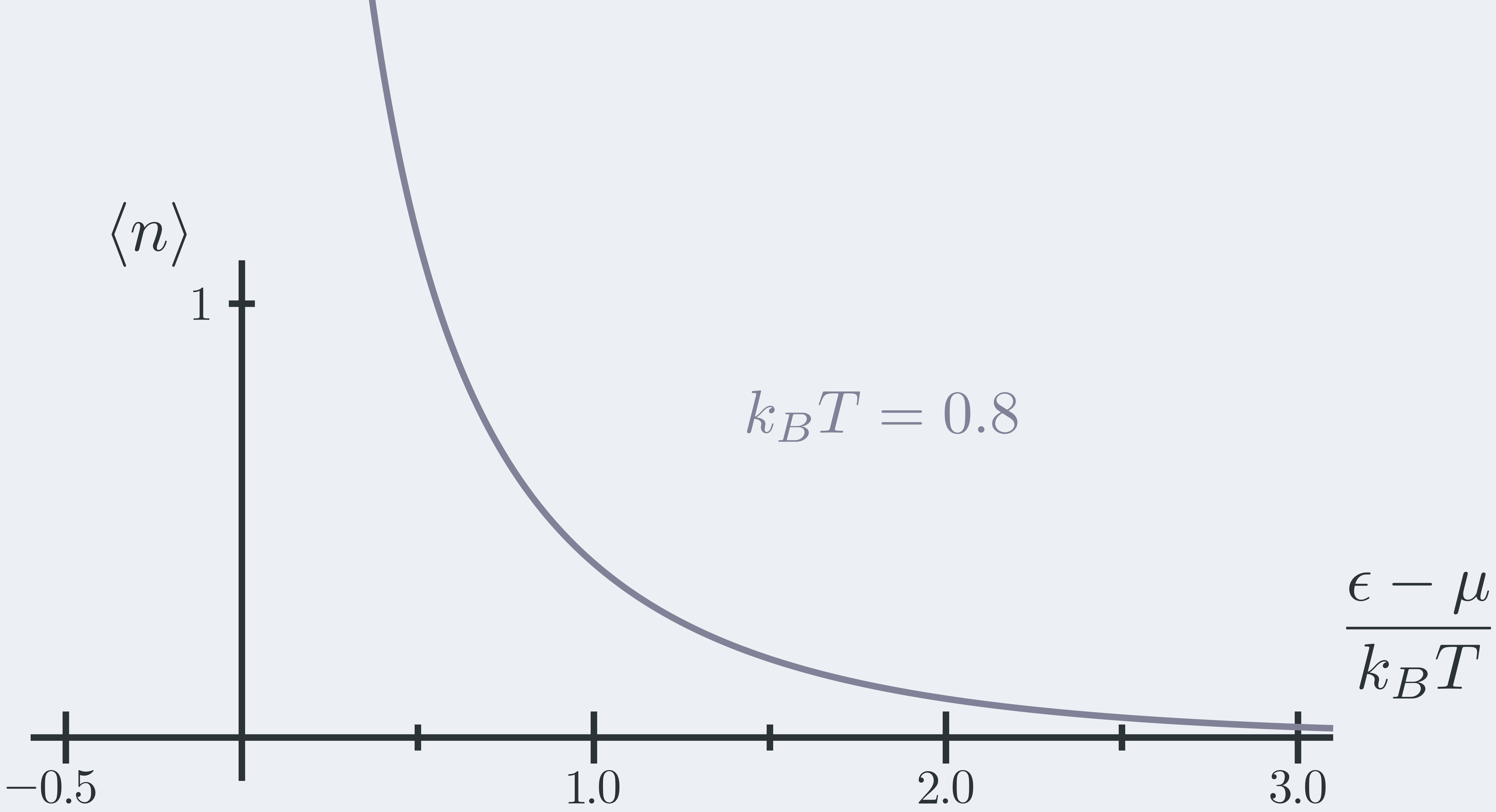
$\boxed{0\epsilon_0\ 3\epsilon_1}$

$$P_I(E = 3\epsilon_0) = 1/4$$

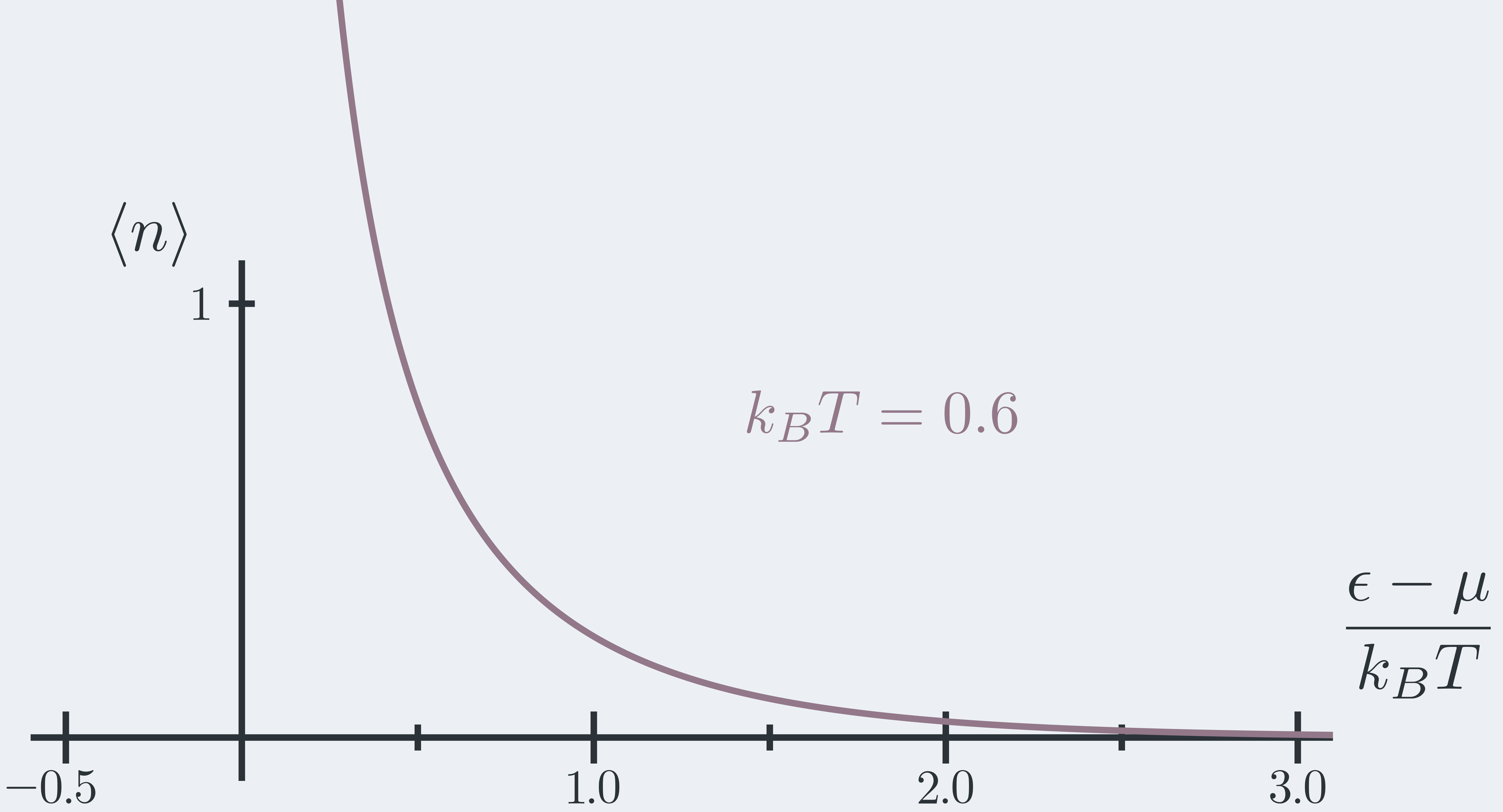
En general, para N partículas y niveles de energía ϵ_0 , ϵ_1 vale

$$\frac{P_I(E = N\epsilon_0)}{P_D(E = N\epsilon_0)} = \frac{2^N}{N+1} \xrightarrow{N \to \infty} \infty$$

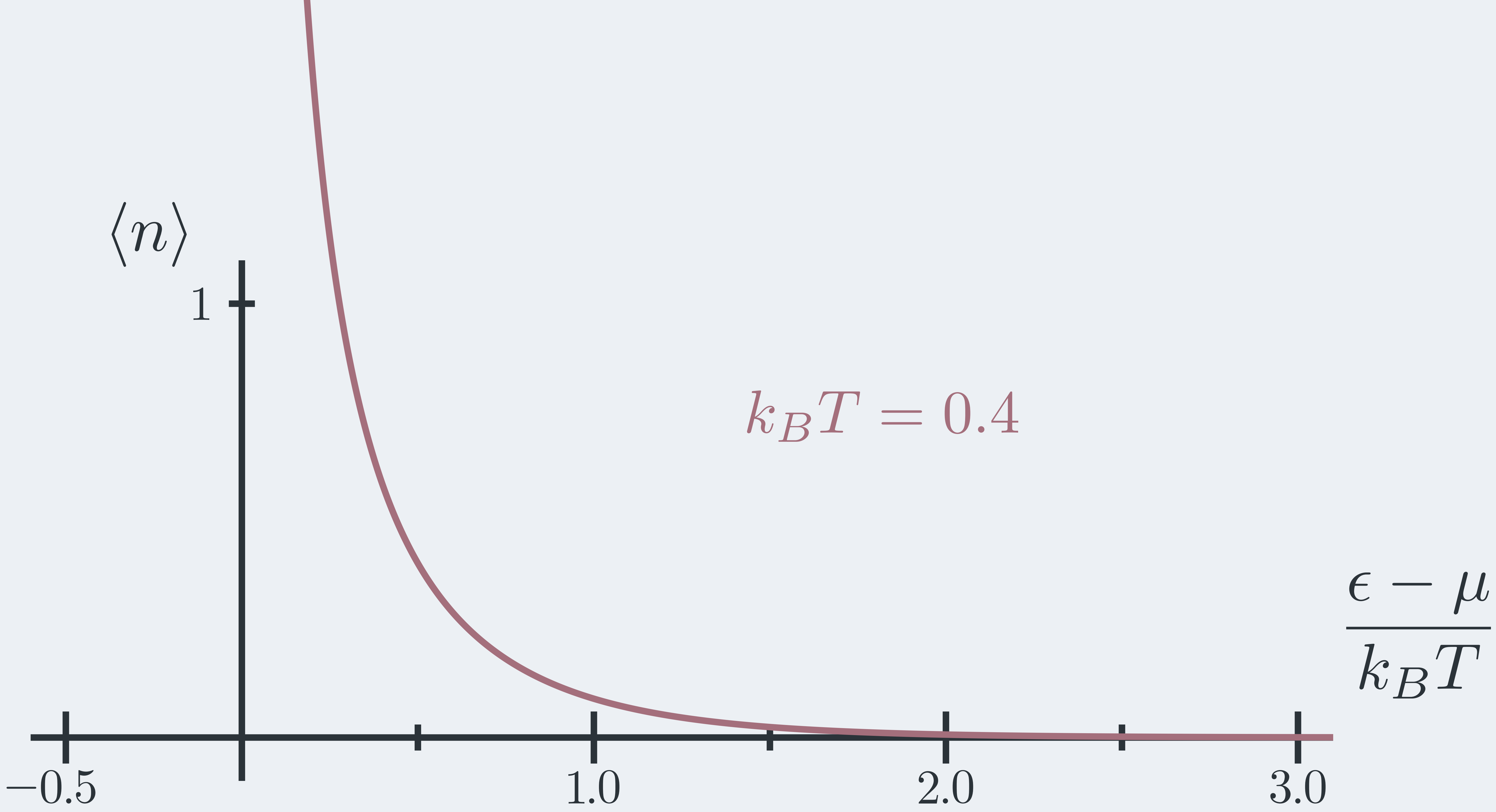

$\langle n \rangle$
1
$k_B T = 1$
$\frac{\epsilon - \mu}{k_B T}$
-0.5
1.0
2.0
3.0



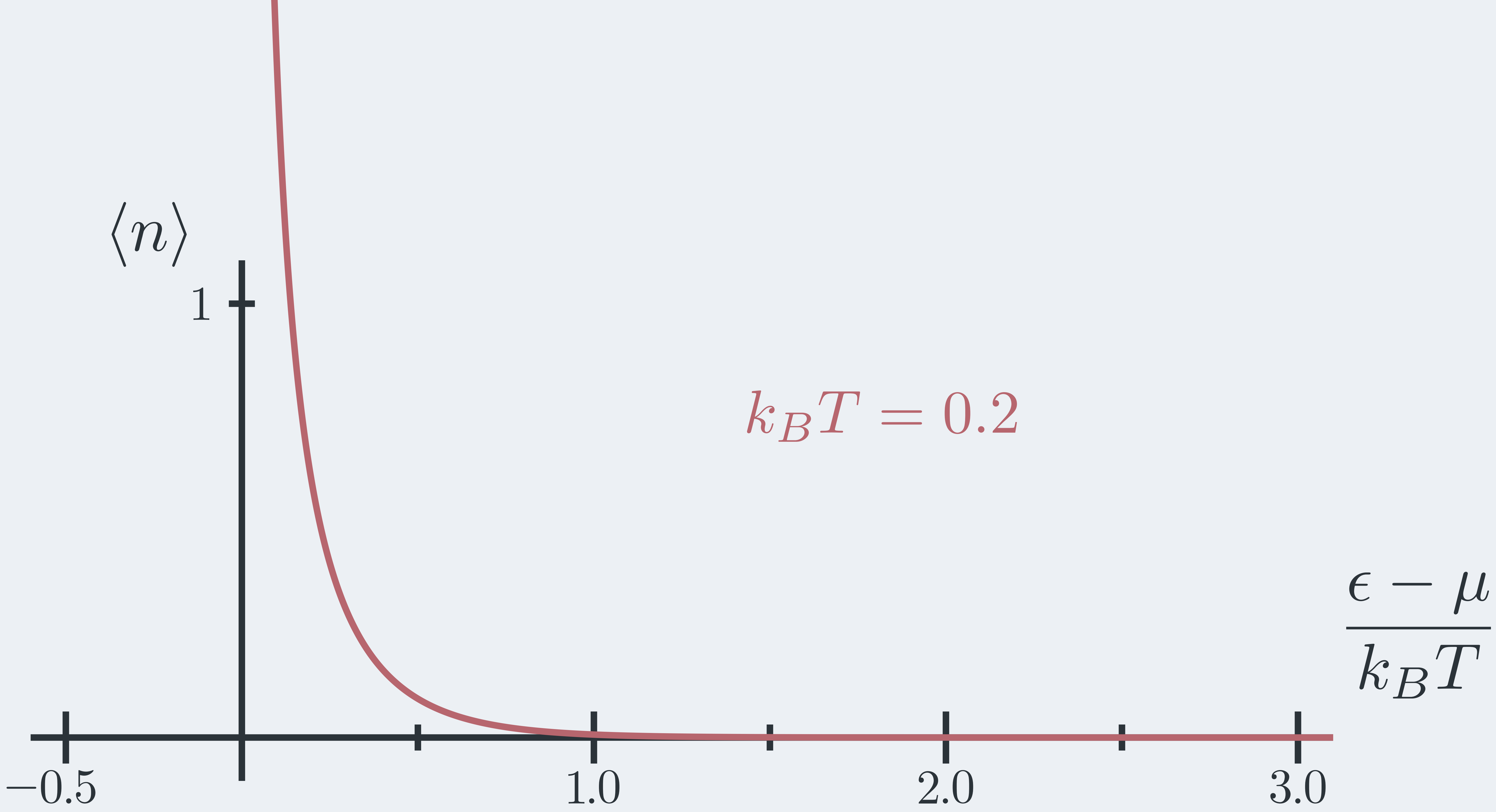
$\langle n \rangle$
1
$k_B T = 0.8$
$\frac{\epsilon - \mu}{k_B T}$
-0.5
1.0
2.0
3.0

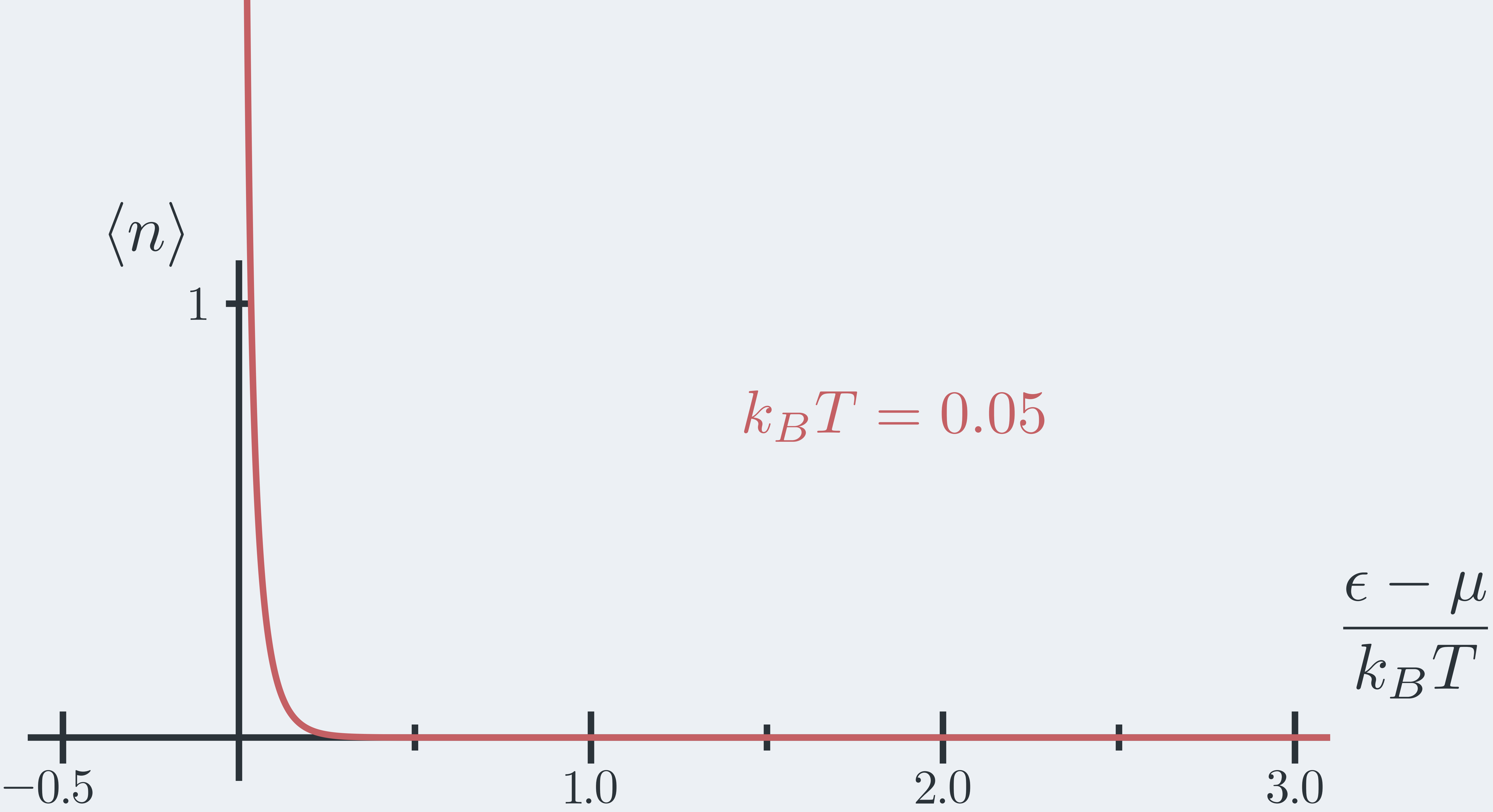


$\langle n \rangle$
1
$k_B T = 0.6$
$\frac{\epsilon - \mu}{k_B T}$
−0.5
1.0
2.0
3.0

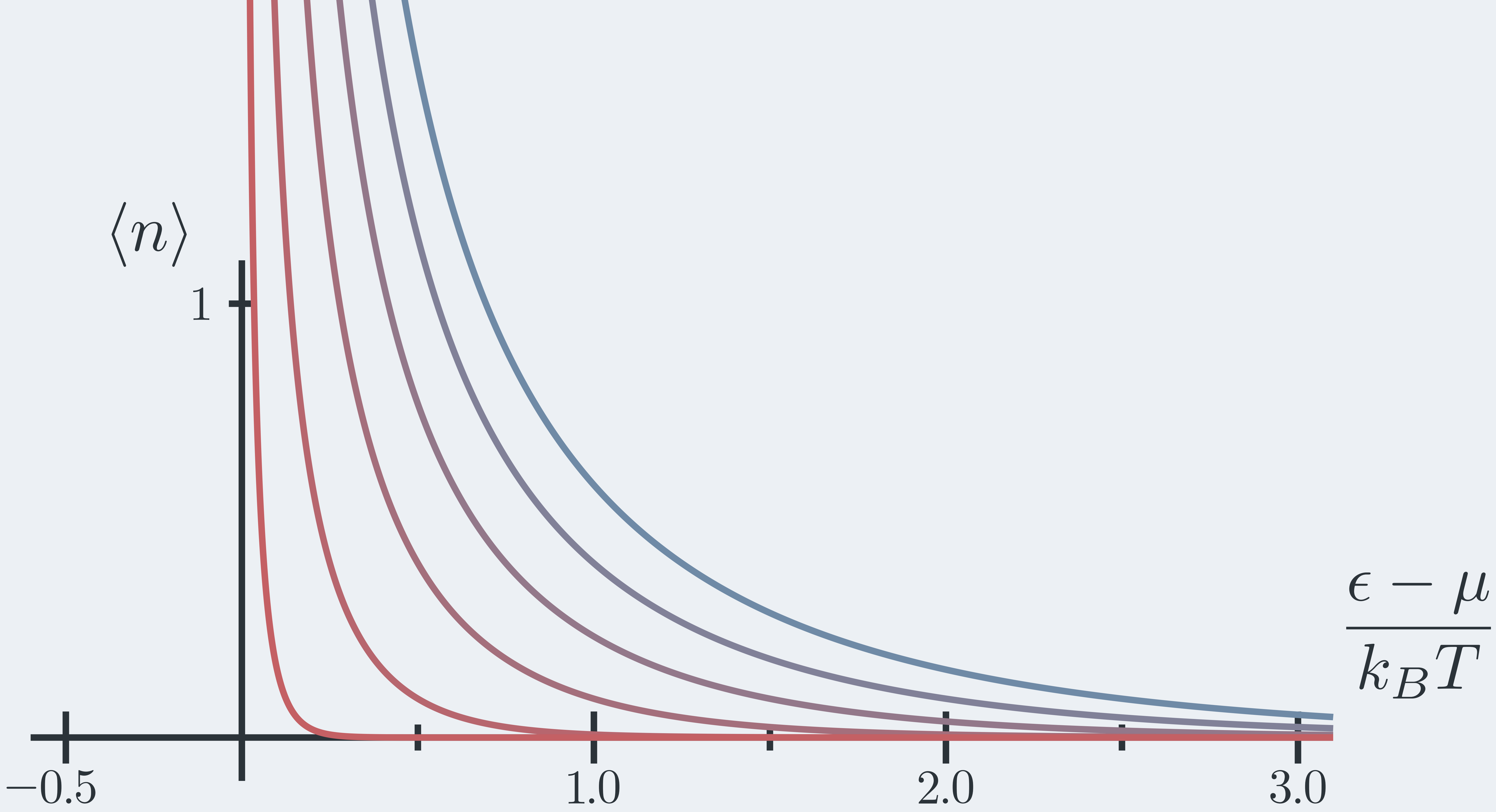


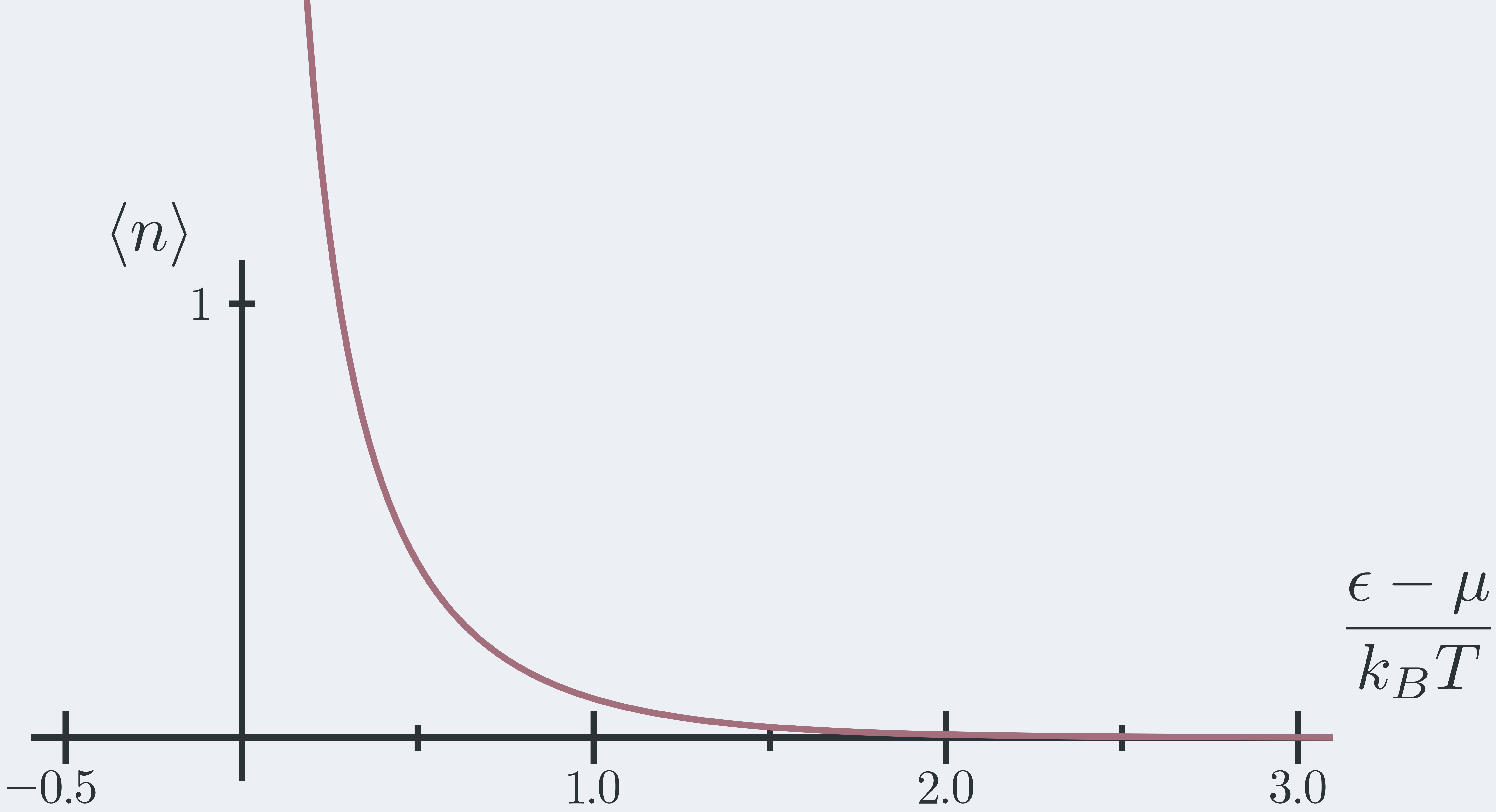
$\langle n \rangle$
1
$k_B T = 0.4$
$\frac{\epsilon - \mu}{k_B T}$
−0.5
1.0
2.0
3.0


$\langle n \rangle$
1
$k_B T = 0.2$
$\frac{\epsilon - \mu}{k_B T}$
-0.5
1.0
2.0
3.0

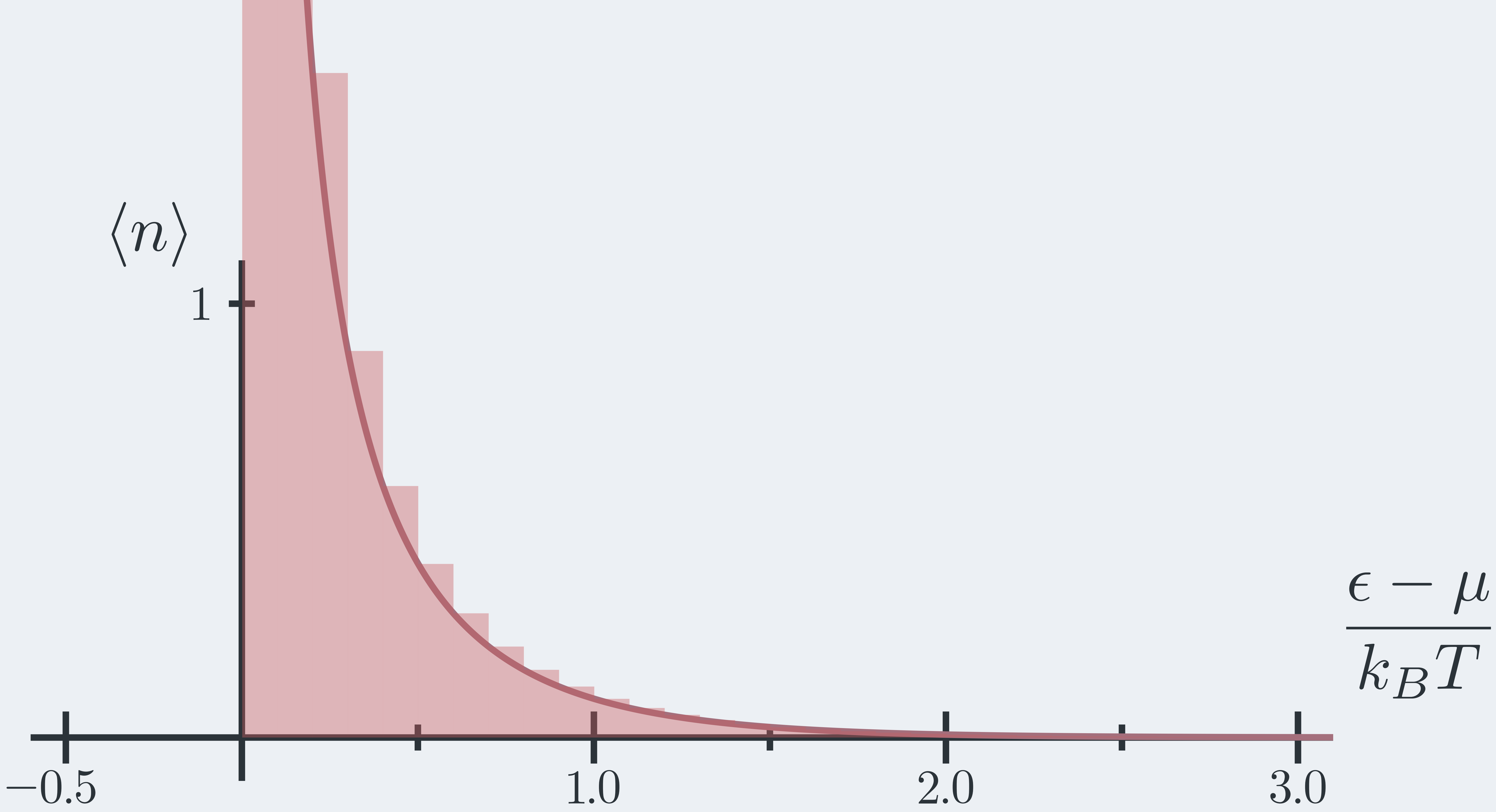


$\langle n \rangle$
1
$k_B T = 0.05$
$\frac{\epsilon - \mu}{k_B T}$
-0.5
1.0
2.0
3.0

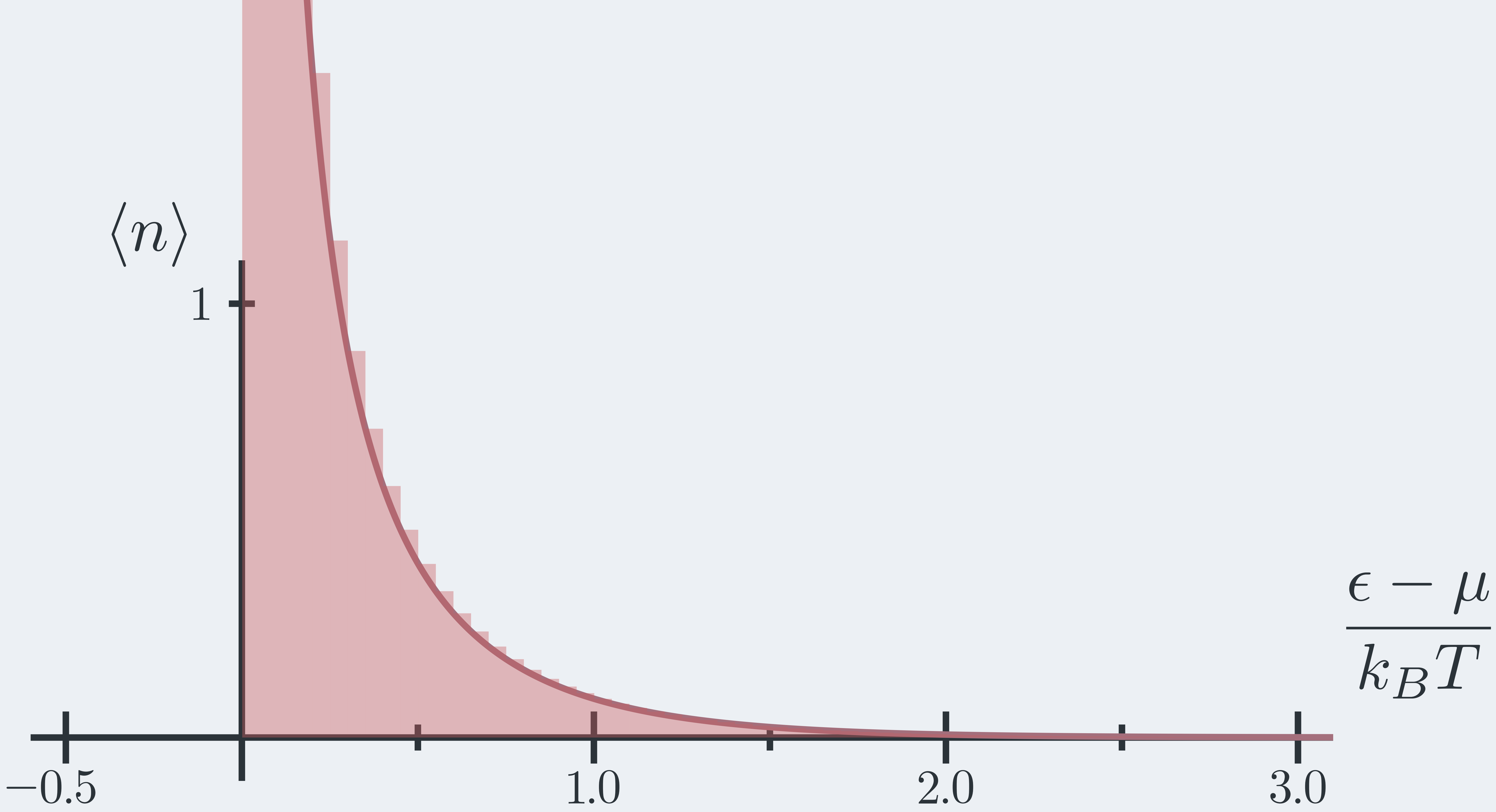

$\langle n \rangle$
1
-0.5
1.0
2.0
3.0
$\frac{\epsilon - \mu}{k_B T}$



$\langle n \rangle$
1
$\frac{\epsilon - \mu}{k_B T}$
−0.5
1.0
2.0
3.0

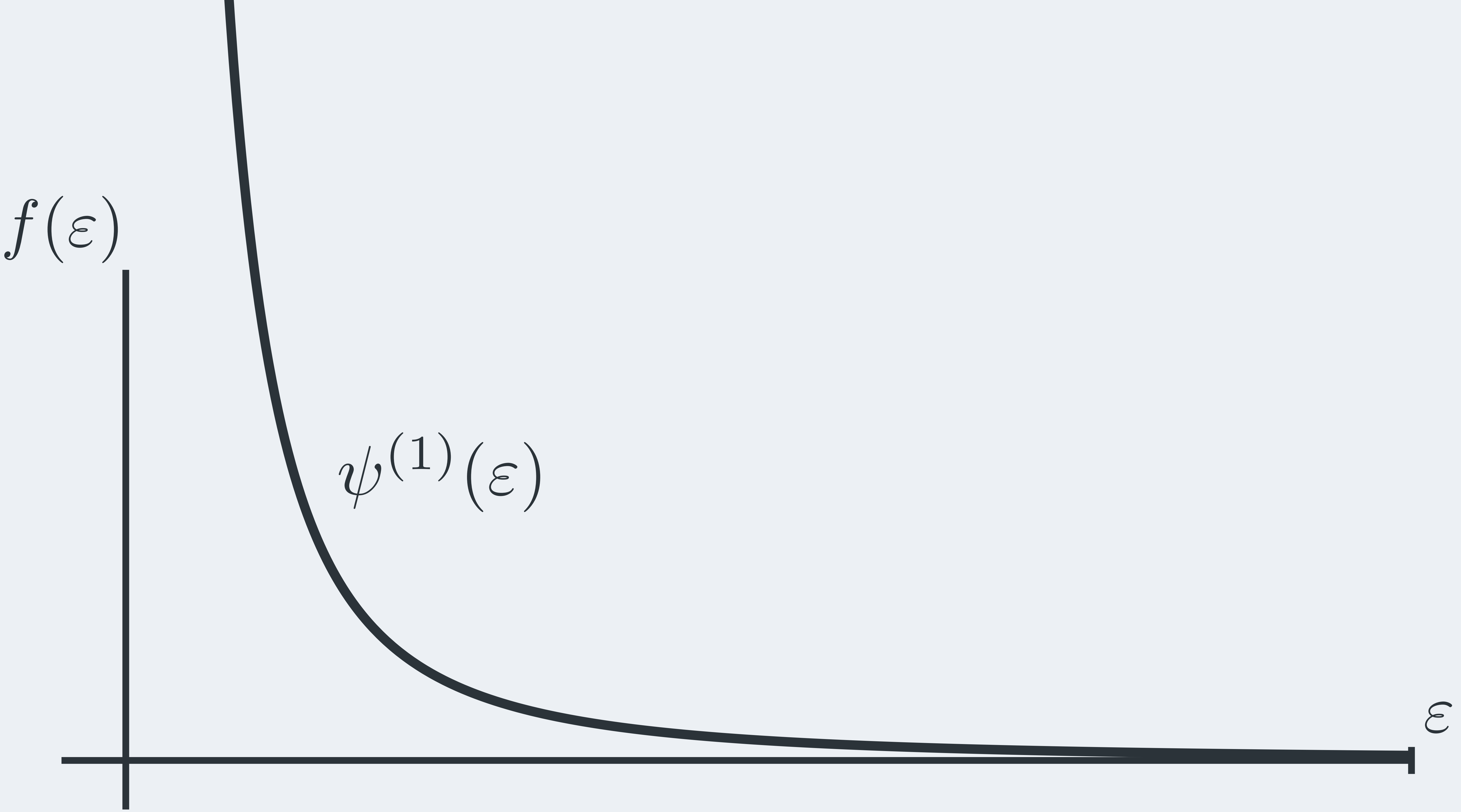


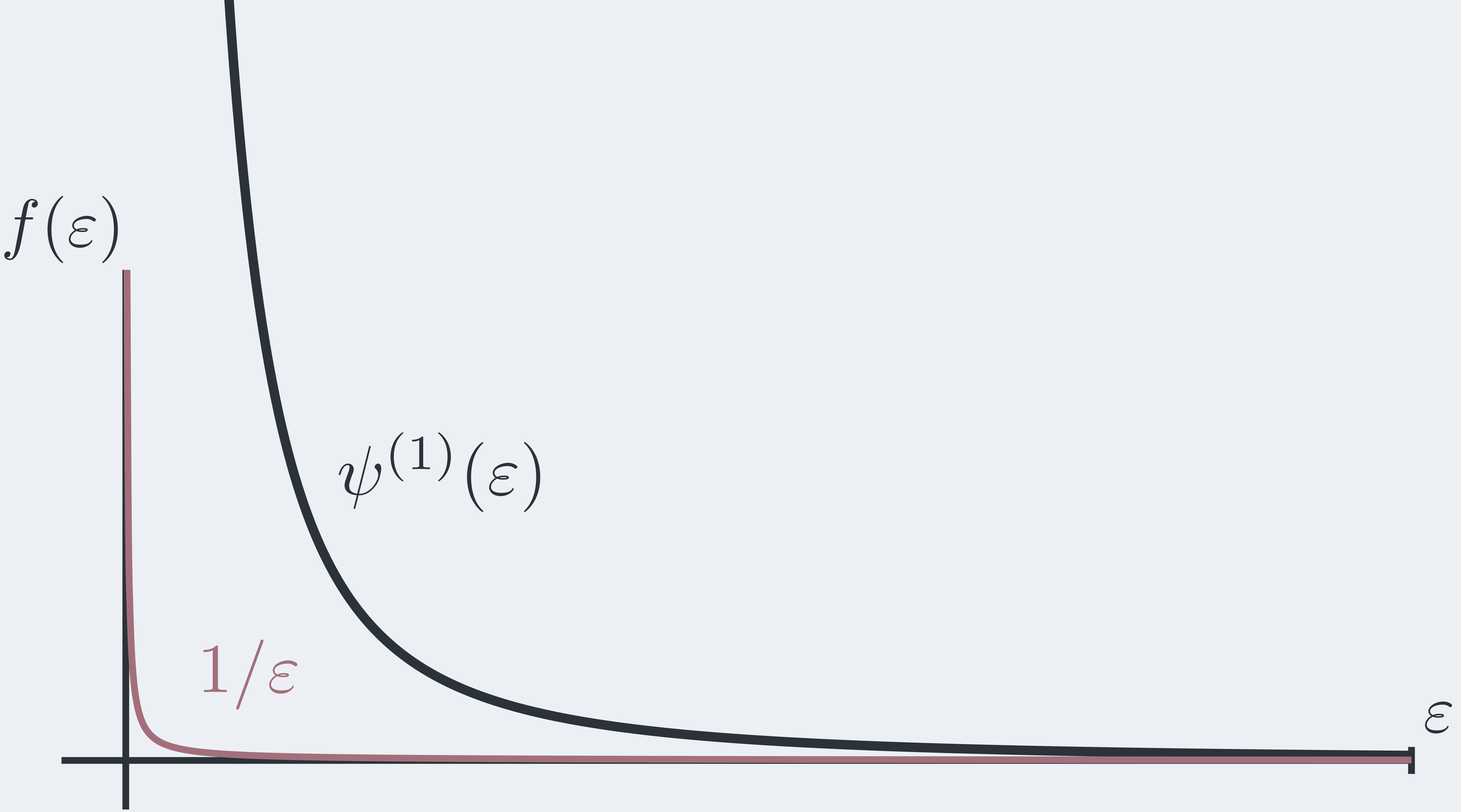
$\langle n \rangle$
1
-0.5
1.0
2.0
3.0
$\frac{\epsilon - \mu}{k_B T}$

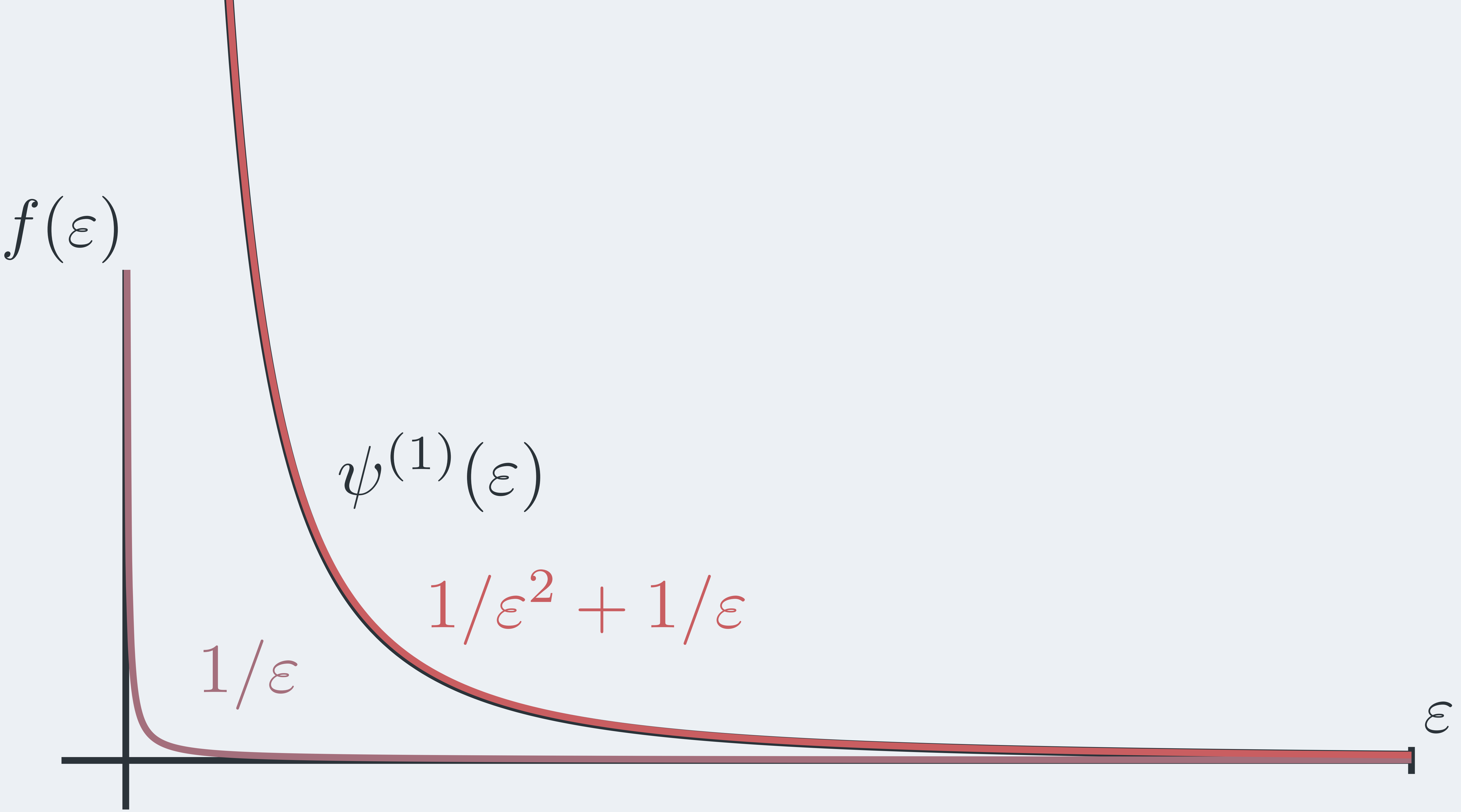


$\langle n \rangle$
1
-0.5
1.0
2.0
3.0
$\frac{\epsilon - \mu}{k_B T}$

Un ejemplo de juguete


$f(\varepsilon)$
$\psi^{(1)}(\varepsilon)$
ε


$f(\varepsilon)$
$\psi^{(1)}(\varepsilon)$
$1/\varepsilon$
ε


$f(\varepsilon)$
$\psi^{(1)}(\varepsilon)$
$1/\varepsilon^2 + 1/\varepsilon$
$1/\varepsilon$
ε

Esto también se puede entender con Transformadas de Fourier

(ver Apéndice F del Pathria)

El Enunciado

a) En el ensamble gran canónico, calcular $\log Z$ para bosones no interactuantes de espíns contenidos en una caja de volumen V en d dimensiones y con una relación de dispersión $\epsilon(\mathbf{p}) = \alpha p^n$, donde α y n son mayores que cero y $d \geq 1$. Por analogía con el caso usual, conviene definir una longitud térmica λ proporcional a $\beta^{1/n}$.

El Enunciado

a) En el ensamble gran canónico, calcular $\log Z$ para bosones no interactuantes de espíns contenidos en una caja de volumen V en d dimensiones y con una relación de dispersión $\epsilon(\mathbf{p}) = \alpha p^n$, donde α y n son mayores que cero y $d \geq 1$. Por analogía con el caso usual, conviene definir una longitud térmica λ proporcional a $\beta^{1/n}$.

b) Encontrar la relación entre la energía media y PV .

c) Cuanto mayor es z, mayor es el número medio de partículas en cada nivel. Teniendo esto en cuenta, si el número medio de partículas es N , ¿cuál es el valor máximo de z? La respuesta no es $z_{\text{max}} = 1$.

d) Demostrar que la contribución P0 del nivel fundamental a la presión, que es una función creciente de z, tiende a cero en el límite termodinámico. Es decir, mostrar que $P_0(z) < P_0(z_{\text{max}}) \to 0$ cuando $N \to \infty$ y $v = V/N$ se mantiene constante.

e) Encontrar la ecuación que define z en términos de N, V y T .

f) Demostrar que si $N \gg 1$ (pero no infinito) para que haya una fracción $f =$

Cosas útiles (o no tan útiles pero que voy a usar)

$$g_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}}{z^{-1}e^x - 1}\,\mathrm{d}x$$

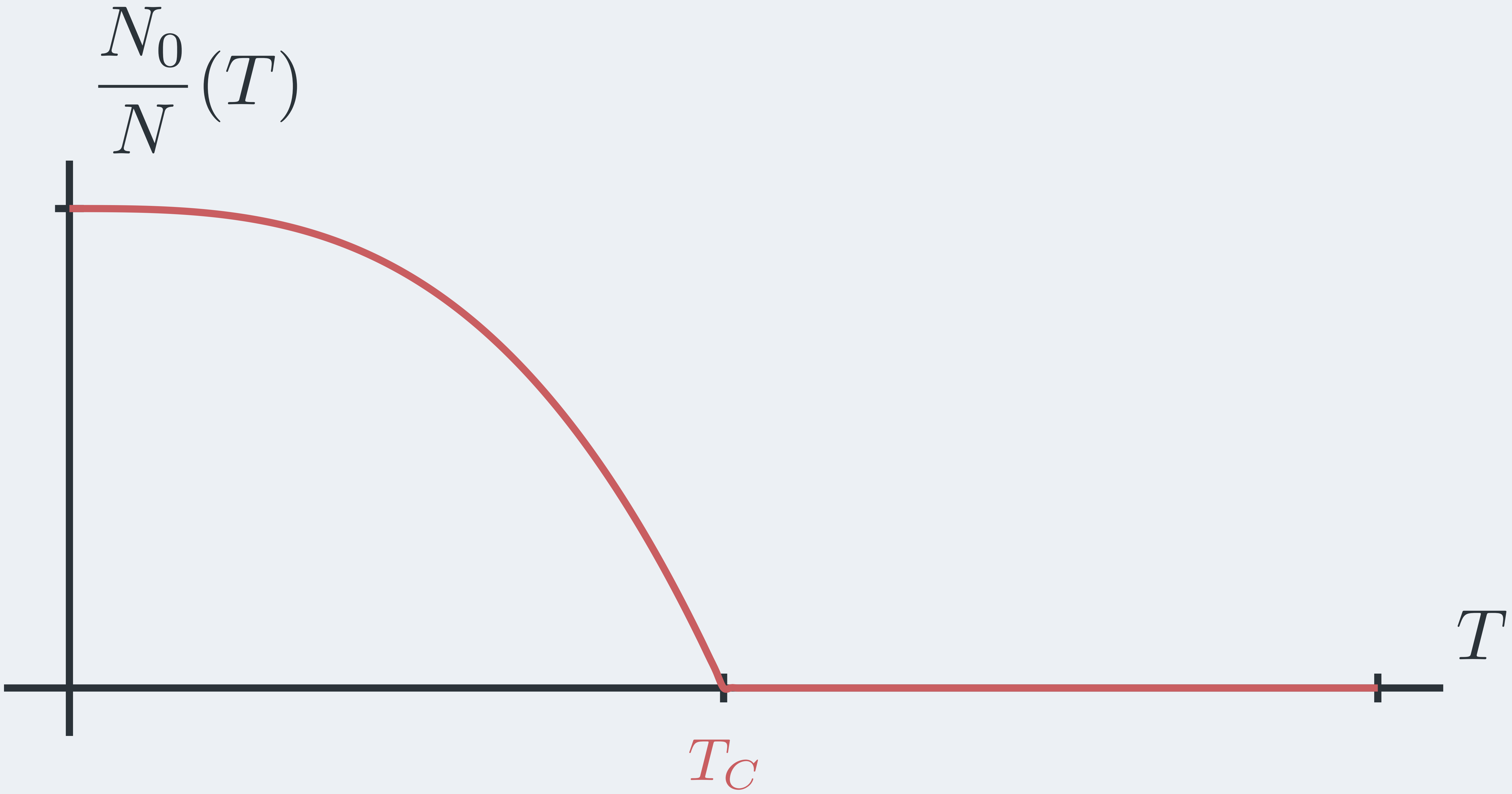
Cosas útiles (o no tan útiles pero que voy a usar)

$$g_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}}{z^{-1}e^x - 1}\,\mathrm{d}x$$

$$\Omega_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(d/2)}$$

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

$$\lambda^d = \left(\frac{\alpha\beta h^l}{\pi^{\frac{l}{2}}}\right)$$



$\frac{N_0}{N}(T)$
T
T_C

Gas de bosones en 3 dimensiones

$$\alpha = 1/2m, \quad l = 2, \quad d = 3$$

Gas de bosones en 3 dimensiones

$$\alpha = 1/2m, \quad l = 2, \quad d = 3$$

$\nu = 3/2 \longrightarrow$ condensa

Gas de bosones en 3 dimensiones

$$\alpha = 1/2m, \quad l = 2, \quad d = 3$$

$\nu = 3/2 \longrightarrow$ condensa

$$\Longrightarrow \; f = 1 - \left(\frac{T}{T_C}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{con} \quad T_C = \frac{h^2}{2mk\pi[\frac{V}{N}\zeta(3/2)]^{\frac{2}{3}}}.$$

Gas de bosones en 3 dimensiones

$$\alpha = 1/2m, \quad l = 2, \quad d = 3$$

$$\nu = 3/2 \longrightarrow \text{condensa}$$

$$\Longrightarrow \ f = 1 - \left(\frac{T}{T_C}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{con} \quad T_C = \frac{h^2}{2mk\pi[\frac{V}{N}\zeta(3/2)]^{\frac{2}{3}}}.$$

Cerca de los 0 K el He^4 tiene densidad $N/V = 0.14$ g cm^{-3} y masa $m \simeq 6.65 \times 10^4$ g

$$\Longrightarrow \ T_C \simeq 3\,\text{K}.$$

Gas de bosones en 2 dimensiones

$$\alpha = 1/2m, \quad l = 2, \quad d = 2$$

Gas de bosones en 2 dimensiones

$$\alpha = 1/2m, \quad l = 2, \quad d = 2$$

$\nu = 1 \longrightarrow$ no condensa

Gas de bosones en 2 dimensiones

$$\alpha = 1/2m, \quad l = 2, \quad d = 2$$

$\nu = 1 \longrightarrow$ ¿no condensa?

Gas de bosones en 2 dimensiones

$$\alpha = 1/2m, \quad l = 2, \quad d = 2$$

$\nu = 1 \longrightarrow$ ¿no condensa?

$$g_1(z) = \frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^\infty \frac{z e^{-x}}{1 - z e^{-x}} \, \mathrm{d}x = \ln\left(1 - z e^{-x}\right)\Big|_0^\infty = -\ln(1 - z) = \ln(fN)$$

Gas de bosones en 2 dimensiones

$$\alpha = 1/2m, \quad l = 2, \quad d = 2$$

$\nu = 1 \longrightarrow$ ¿no condensa?

$$\Longrightarrow \; f = 1 - \left(\frac{T}{T_C}\right) \quad \text{con} \quad T_C = \frac{h^2}{2mk\pi \frac{A}{N} \ln(fN)}.$$

Gas de bosones en 2 dimensiones

$$\alpha = 1/2m, \quad l = 2, \quad d = 2$$

$\nu = 1 \longrightarrow$ ¿no condensa?

$$\implies f = 1 - \left(\frac{T}{T_C}\right) \quad \text{con} \quad T_C = \frac{h^2}{2mk\pi \frac{A}{N} \ln(fN)}.$$

100 mL de He^4 tienen 1.4×10^{25} átomos

$$\implies T_C^{(2d)} \simeq \frac{T_C^{(3d)}}{25 \ln(10)} = 0.5\text{K}$$